四庫全書

子部

數學卷八

婺源江永撰

算賸

勿菴先生論算極詳觀玩之餘有得輒筆之此為賸義云爾

正弧三角會通

弧三角以正者為宗舉要第二卷論正弧其法散出有見於求餘角法者有見於第四卷次形法者又有現於

塹堵測量環中黍尺二書者今為薈萃總計求角求邊凡若干正法别法附之臚列分明學者庶易會焉

甲為正角乙酉春分角丙為交角乙甲猶赤道乙丙猶黃道丙甲猶距緯正弧隨處有之不止黃赤道而以黃赤為喻諸法皆以甲乙丙為鈐記

求丙甲邊法

半徑與乙角正弦若乙丙正弦與丙甲正弦中二率相乘為實首

率為法除
實得四率

半徑與乙角正切若乙甲正弦與丙甲正切

丙角正切與半徑若乙甲正切與丙甲正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙角餘切

若乙甲正切與丙甲正弦

半徑與丙角餘弦若乙丙正切與丙甲正切

又法丙角餘弦與半徑若乙丙餘切與丙甲餘切

乙甲餘弦與半徑若乙丙餘弦與丙甲餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙甲正割

若乙丙餘弦與丙甲餘弦

又法半徑與乙甲餘弦若乙丙正割與丙甲正割

又法乙丙餘弦與半徑若乙甲餘弦與丙甲正割

又法乙丙正割與半徑若乙甲正割與丙甲餘弦

丙角正弦與半徑若乙角餘弦與丙甲餘弦

半徑與丙角餘割若乙角餘弦與丙甲餘弦

又法不用四率但以加減法取初數即得丙甲正弦

法為乙角度與乙丙邊度相併為總弧相減為存弧各取餘弦如法相加減總弧過象限則兩餘弦相加不過象限則相減折半為初數即為丙甲正弦

求乙丙邊法

乙角正弦與半徑若丙甲正弦與乙丙正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙角餘割若丙甲正弦與乙丙正弦

乙角餘弦與半徑若乙甲正切與乙丙正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙角正割

若乙甲正切與乙丙正切

丙角正弦與半徑若乙甲正弦與乙丙正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與兩角餘割

若乙甲正弦與乙丙正弦

丙角餘弦與半徑若丙甲正切與乙丙正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙角正割

若丙甲正切與乙丙正切

半徑與丙甲餘弦若乙甲餘弦與乙丙餘弦

又法乙甲餘弦與半徑若丙甲正割與乙丙正割

又法丙甲正割與半徑若乙甲餘弦與乙丙餘弦

又法半徑與乙甲正割若丙甲正割與乙丙正割

又法乙甲正割與半徑若丙甲餘弦與乙丙餘弦

又法丙甲餘弦與半徑若乙甲正割與乙丙正割

乙角正切與半徑若丙角餘切與乙丙餘弦

半徑與乙角餘切若丙角餘切與乙丙餘弦

求乙甲邊法

乙角正切與半徑若丙甲正切與乙甲正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙角餘切若丙甲正切與乙甲正弦

又法乙角正弦與乙角餘弦若丙甲正切與乙甲正弦

半徑與乙角餘弦若乙丙正切與乙甲正切

又法乙角正割與半徑若乙丙正切與乙甲正切

半徑與丙角正弦若乙丙正弦與乙甲正弦

半徑與丙角正切若丙甲正弦與乙甲正切

甲丙餘弦與半徑若乙丙餘弦與乙甲餘弦

又法乙丙正割與半徑若丙甲正割與乙甲餘弦

又法半徑與丙甲正割若乙丙餘弦與乙甲餘弦

又法乙丙餘弦與半徑若丙甲餘弦與乙甲正割

又法半徑與乙丙正割若丙甲餘弦與乙甲正割

又法丙甲正割與半徑若乙丙正割與乙甲正割

乙角正弦與半徑若丙角餘弦與乙甲餘弦

半徑與乙角餘割若丙角餘弦與乙甲餘弦

求乙角法

乙丙正弦與半徑若丙甲正弦與乙角正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘割

若丙甲正弦與乙角正弦

又法丙甲正弦與半徑若乙丙正弦與乙角正割

又法半徑與丙甲餘割若乙丙正弦與乙角正割

又法乙丙正弦與丙甲正弦若乙角正割與乙角正切

乙甲正弦與半徑若丙甲正切與乙角正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙甲餘割

若丙甲正切與乙角正切

又法丙甲正切與半徑若乙甲正弦與乙角餘切

乙丙正切與半徑若乙甲正切與乙角餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘切

若乙甲正切與乙角餘弦

又法乙甲正切與半徑若乙丙正切與乙角正割

又法半徑與乙甲餘切若乙丙正切與乙角正割

半徑與丙甲餘弦若丙角正弦與乙角餘弦 永補

乙甲餘弦與半徑若丙角餘弦與乙角正弦 永補

半徑與乙甲正割若丙角餘弦與乙角正弦 永補

乙丙餘弦與半徑若丙角餘切與乙角正切 永補

半徑與乙丙正割若丙角餘切與乙角正切

求丙角法

乙丙正弦與半徑若乙甲正弦與丙角正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘割

若乙甲正弦與丙角正弦

又法半徑與乙丙正割若乙角餘切與丙角正切

又法乙甲正弦與半徑若乙丙正弦與丙角餘割

丙甲正弦與半徑若乙甲正切與丙角正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙甲餘割

若乙甲正切與丙角正切

又法乙甲正切與半徑若丙甲正弦與丙角餘切　永補

乙丙正切與半徑若丙甲正切與丙角餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘切

若丙甲正切與丙角餘弦

又法丙甲正切與半徑若乙丙正切與丙角正割　永補

丙甲餘弦與半徑若乙角餘弦與丙角正弦　永補

半徑與丙甲正割若乙角餘弦與丙角正弦

半徑與乙角正弦若乙甲餘弦與丙角餘弦 永補

半徑與乙角正切若乙丙餘弦與丙角餘切 永補

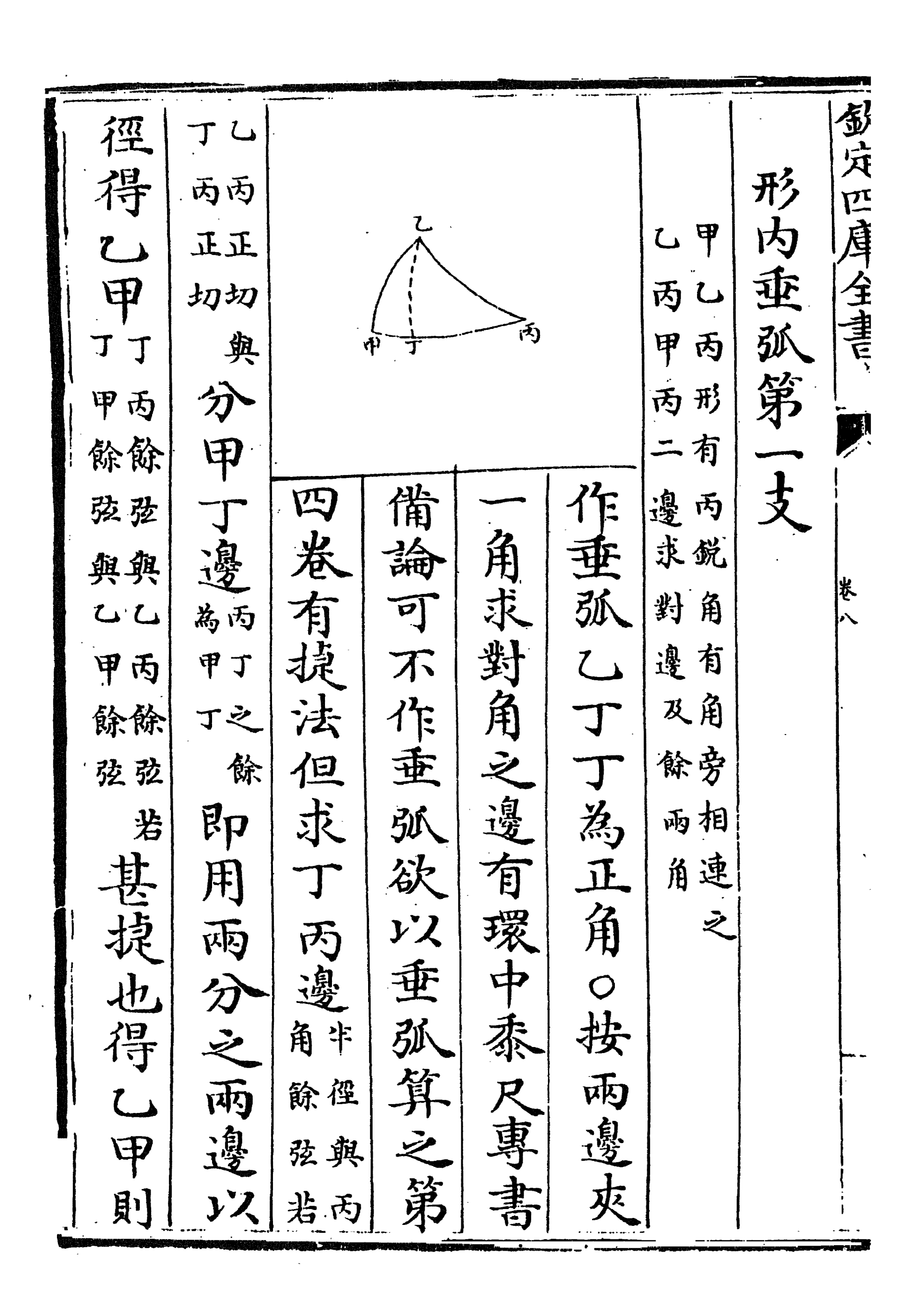
已上求邊求角諸法具足有未備者永為補之一種有數法擇用一焉可也 永所補者亦因他法隅反非臆測也用之可勿疑

垂弧法趨捷

舉要第三卷論垂弧但言可求某邊某角不詳其求之之法以有正弧三角法可攷也然算以捷為貴有可省者徑省之諸形中各求捷法以趨簡易

形內垂弧第一支

甲乙丙形有丙銳角有角旁相連之乙丙甲丙二邊求對邊及餘兩角



作垂弧乙丁丁為正角○按兩邊夾一角求對角之邊有環中黍尺專書備論可不作垂弧欲以垂弧算之第四卷有捷法但求丁丙邊半徑與丙角餘弦若乙丙正切與丁丙正切分甲丁邊丙丁之餘為甲丁即用兩分之兩邊以徑得乙甲丁丙餘弦與乙丙餘弦若丁甲餘弦與乙甲餘弦甚捷也得乙甲則

二角乙甲可求矣若按次求之先求丁丙次求乙丁次求丁乙丙分角次求乙甲次求甲角及丁乙甲分角末以兩乙角并之成乙角較為煩曲

形內垂弧第二支甲乙丙形有丙鋭角有角旁相連之乙丙邊及與各相對之乙甲邊求餘兩角一邊

此當先求甲角乙甲正弦與丙角正弦若乙丙正弦與甲角正弦次求丁丙半徑與丙角餘弦若乙丙正切與丁丙正切甲丁半徑與甲角餘弦若乙甲正切與甲丁正切分邊併得甲丙則乙角可得不必求垂弧與

分角

形內垂弧第三支甲乙丙形有乙丙二角有乙丙邊求甲角及餘邊

邊在兩角之間斜弧三角之難求者也若以垂弧法求之當求乙丁邊半徑與丙角正弦若乙丙正弦與乙丁正弦丁乙丙分角乙丙餘弦與半徑若丙角餘切與乙角正切原設乙角內減丁乙丙得丁乙甲分角次求甲角半徑與乙分角正弦若乙丁餘弦與甲角餘弦乙甲邊甲角正弦與半徑若乙丁正弦與乙甲正弦甲丙邊甲角正弦與乙丙正弦若

原設乙角正弦與甲丙正弦此不得不求垂弧與分角者也按次形法三角求邊以角易邊邊易為角此形雖止兩角亦可弧角相易以次形求之蓋在本形為兩角夾一邊次形即為兩邊夾一角在本形為求對邊之角在次形即為求對角之邊徑用環中黍尺加減捷法以求之一求而甲角可得矣此理隱於次形篇中永於三角求邊悟得之

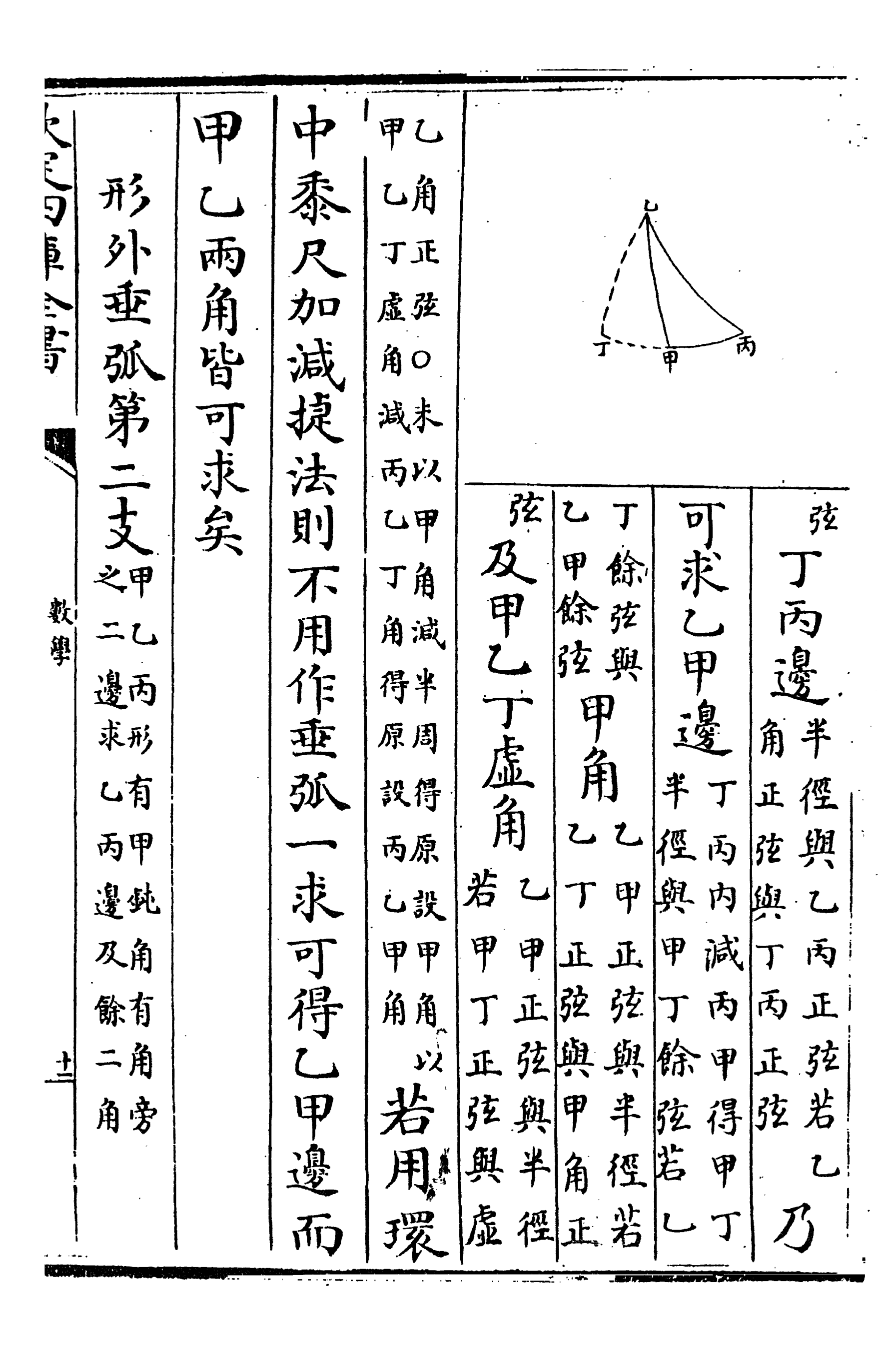
形內垂弧第四支 甲乙丙形有丙甲二角有乙甲邊求乙角及餘二邊

此當先求乙丙邊丙角正弦與甲角正弦若乙甲正弦與乙丙正弦次求丙丁半徑與丙角餘弦若乙丙正切與丙丁正切丁甲半徑與甲角餘弦若乙甲正切與丁甲正切分邊併得丙甲而乙角可得

形內垂弧第五支餘二邊相同求三角此形易求畧之

形外垂弧第一支甲乙丙形有丙銳角有夾角之兩邊求乙甲邊及餘兩角

自乙角作垂弧於形外補成正角丁角本法須求丙乙丁角乙丙餘弦與半徑若丙角餘切與乙角正切乙丁邊半徑與乙丙正弦若丙角正弦與乙丁正



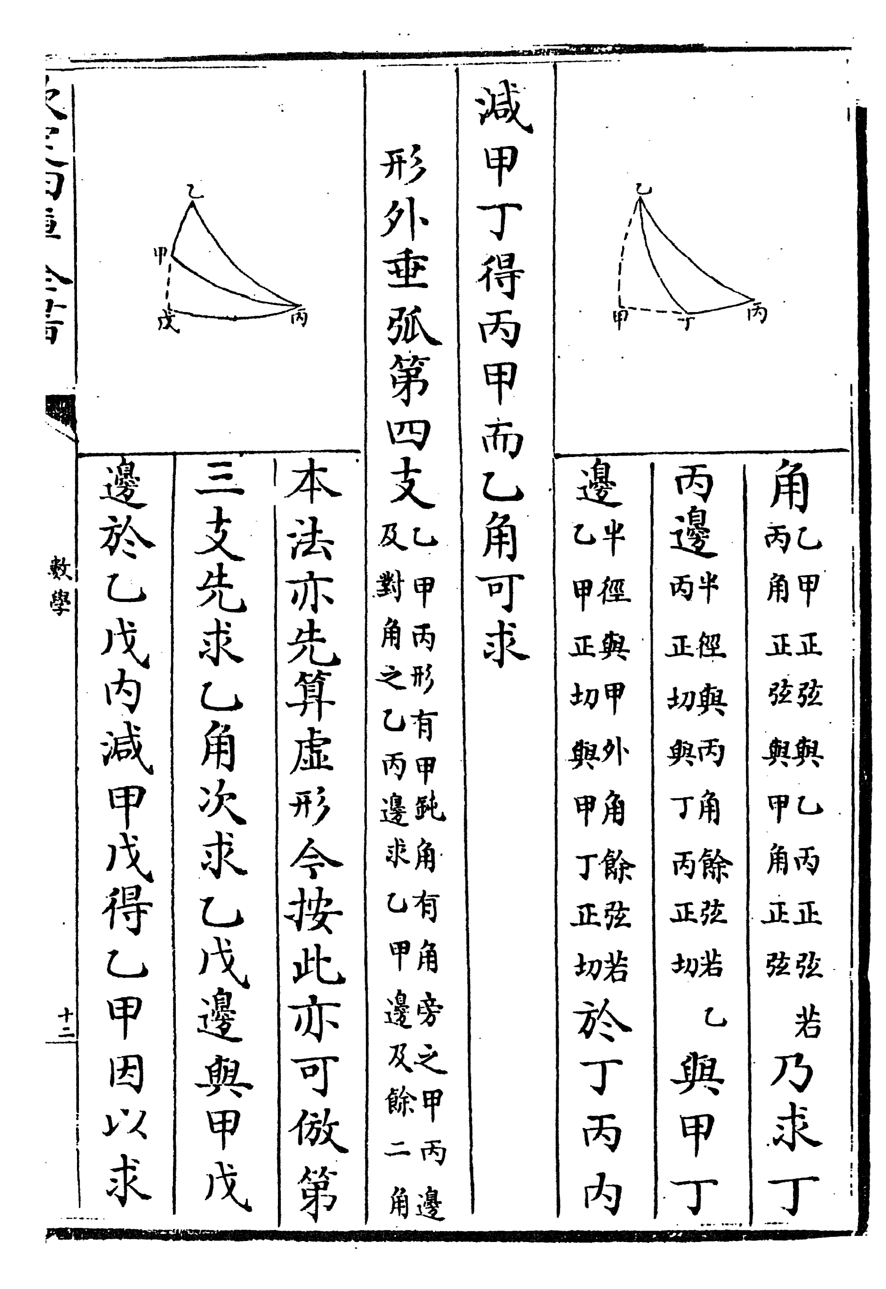
弦丁丙邊半徑與乙丙正弦若乙角正弦與丁丙正弦乃可求乙甲邊丁丙內減丙甲得甲丁半徑與甲丁餘弦若乙丁餘弦與乙甲餘弦甲角乙甲正弦與半徑若乙丁正弦與甲角正弦及甲乙丁虛角乙甲正弦與半徑若甲丁正弦與虛乙角正弦○末以甲角減半周得原設甲角以甲乙丁虛角減丙乙丁角得原設丙乙甲角若用環中黍尺加減捷法則不用作垂弧一求可得乙甲邊而甲乙丙角皆可求矣

形外垂弧第二支甲乙丙形有甲鈍角有角旁之二邊求乙丙邊及餘二角

本法亦作垂弧於形外補成正角先求虛邊虛角而後可求形內之邊角今按此亦可用環中黍尺法角求對邊鈍角用大矢徑得乙丙因以求二角則不必作垂弧

形外垂弧第三支甲乙丙形有丙鋭角有角旁之乙丙邊有對角之乙甲邊求丙甲邊及餘二角

本法先求虛邊虛角今按此可求甲



角乙甲正弦與乙丙正弦若丙角正弦與甲角正弦乃求丁丙邊半徑與丙角餘弦若乙丙正切與丁丙正切與甲丁邊半徑與甲外角餘弦若乙甲正切與甲丁正切於丁丙內減甲丁得丙甲而乙角可求

形外垂弧第四支乙甲丙形有甲鈍角有角旁之甲丙邊及對角之乙丙邊求乙甲邊及餘二角

本法亦先算虛形令按此亦可做第三支先求乙角次求乙戊邊與甲戊邊於乙戊內減甲戊得乙甲因以求

丙角

形外垂弧第五支乙甲丙形有丙甲二角一銳一鈍有丙甲邊在兩角之中求一角

本法作垂弧先算虛邊虛角令按兩角夾一邊求對邊之角猶之兩邊夾一角求對角之邊徑易角為邊易邊為角用加減捷法可得對丙甲邊之

乙角

形外垂弧第六支乙甲丙形有乙甲二角乙銳甲鈍有丙甲邊與乙銳角相對鈍角相連

此當先求乙丙邊有本形弧角比例次求乙戊虛邊半徑與乙角餘弦若乙丙正切與乙戊正切次求甲戊虛邊半徑與甲外角餘弦若丙甲正切與甲戊正切於乙戊內減甲戊得乙甲因以求丙角

形外垂弧第七支乙甲丙形有乙銳角甲鈍角有丙乙邊與甲鈍角相對銳角相連

此當先求丙甲邊餘如六支之法

垂弧又法第一支乙甲丙形有乙丙邊在兩角之間而兩角並鈍求餘二邊及甲角

法引丙甲至己引乙甲至戊各滿半周作戊己邊與乙丙等而己與戊並乙丙之外角成甲戊己次形依法作垂弧於次形之內如己丁分為兩形本法求乙甲邊以己丁戊分形求到丁戊半徑與戊角餘弦若己戊正切與丁戊正切以己丁甲形求到甲丁先於己丁戊形求得己角以減原有之己角餘

為丁巳甲分角又求得巳丁垂弧乃求甲丁法為半徑與巳分角正切若巳丁正弦與甲丁正切合之

成甲戊以減半周得乙甲求丙甲邊以巳丁甲分形求到巳甲丁巳甲角餘弦與半徑若巳丁正切與巳甲正切以減半周得丙甲乃以巳丁甲分形求到甲交角巳甲正弦與半徑若巳丁正弦與甲角正弦按

此殊多曲折徑易角為邊易邊為角或用本形之乙丙兩鈍角易為邊以乙丙邊為角取矢或用次形之巳戊兩鋭角易為邊取巳戊矢皆可用加減捷法求之即

可得甲角因以求二邊

垂弧又法第二支乙甲丙形有丙甲二角有乙甲邊與丙角相對而兩角俱鈍求乙角

及餘邊

如法引甲乙丙乙俱滿半周會於己成丙甲己次形作己丁垂弧於次形內分次形為兩本法求乙角惟求分形兩己角合之為次形己角與乙對角等又求分形甲丁丁丙并之為甲丙以求到次形己丙減半周為乙丙今按此形當先求乙丙邊丙角正弦與乙甲正弦若甲角正弦與乙丙正弦減半周餘為己丙虛邊次求甲丁乙甲減半

周得甲己半徑與甲外角餘弦若甲己正切與甲丁正切丁丙半徑與丙外角餘弦若己丙正切與丁丙正切并得甲丙因以求乙角有弧角比例稍為直捷若欲先知乙角如本法可矣乙甲餘弧與半徑若甲外角餘切與甲己丁分角正切又半徑與甲己正弦若甲外角正弦與丁己正弦又丁己餘弦與半徑若丙外角餘弦與丁己丙角正弦合兩分形己角為次形己角即為本形乙角

垂弧又法第三支乙甲丙形有乙丙乙甲兩邊有乙角在兩邊之中

本法用甲乙戊次形算之今按此亦可用加減捷法徑得丙甲

垂弧又法第四支乙甲丙形有丙角有甲丙邊與角連有乙甲邊與角對

法用甲己戊次形甲己為甲乙減半周之餘甲戊為甲丙減半周之餘戊角為丙之外角作垂弧於內求乙丙邊及餘兩角按此形當先求乙角乙甲正弦與丙角正弦若甲丙正弦與乙角正弦因知己虛角己為乙之外角次求丁己半徑與己角餘弦若甲己正切與丁己正切戊丁半徑與戊

角正切若甲戊正弦與戊丁正切併得己戊即丙乙因以求甲角若欲先知甲角即於丁戊甲分形求之半徑與戊角正切若甲戊餘弦與甲角餘切因以求乙丙邊丙角正弦與乙甲正弦若甲角正弦與乙丙正弦

垂弧又法第五支乙甲丙形有三邊內有乙甲丙甲二邊相同而皆為過弧求三角

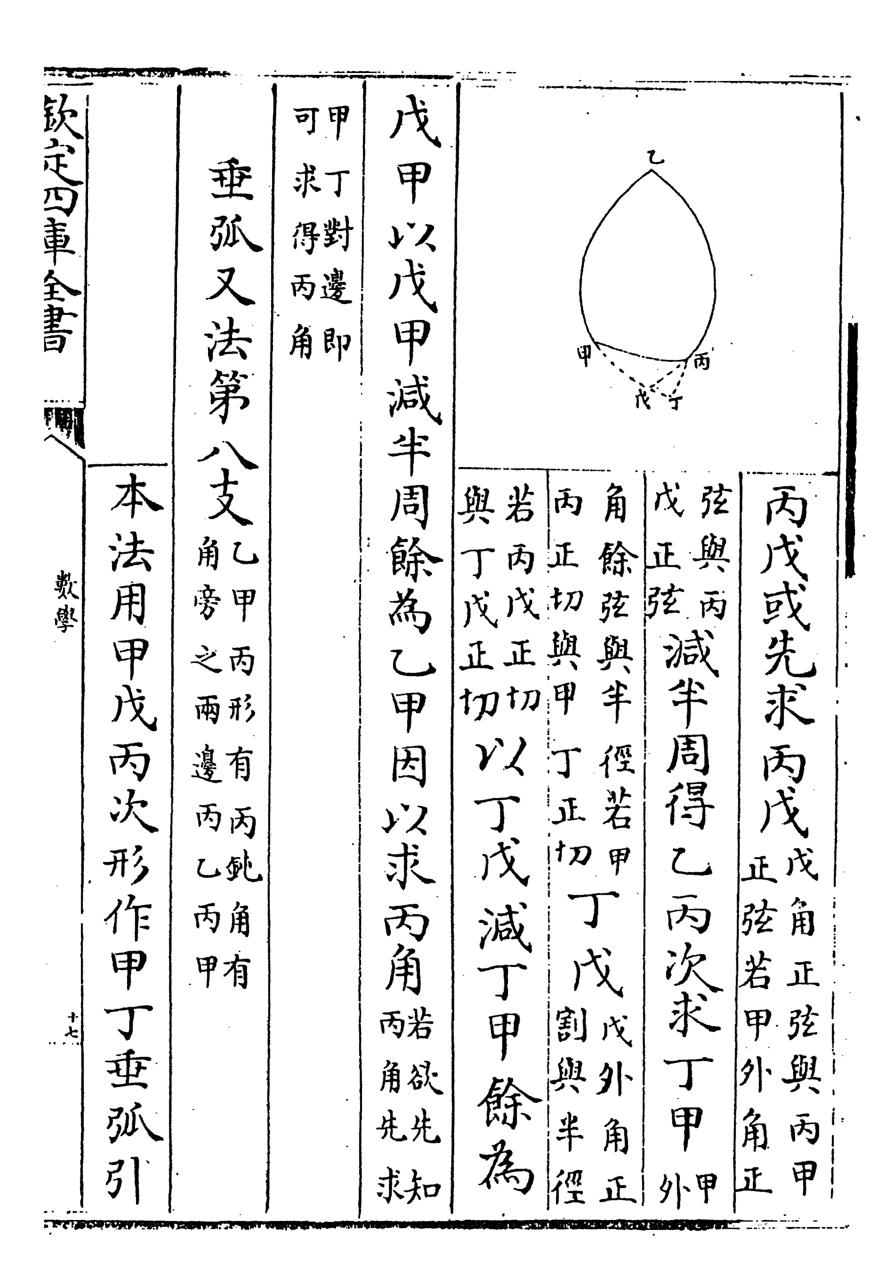
本法用次形作垂弧求之今按此亦可用加減捷法用甲角角旁兩弧同度則加減有變例檢環中黍尺五卷補遺用

垂弧又法第六支乙甲丙形有丙甲二鈍角有甲丙邊在兩角間

本法引乙丙乙甲滿半周會于戊成甲戊丙次形作垂弧於次形外以求之今按此亦可易角為邊易邊為角依加減捷法求之徑得乙角因以求二邊

垂弧又法第七支乙甲丙形有乙甲二鈍角有甲丙邊與角對

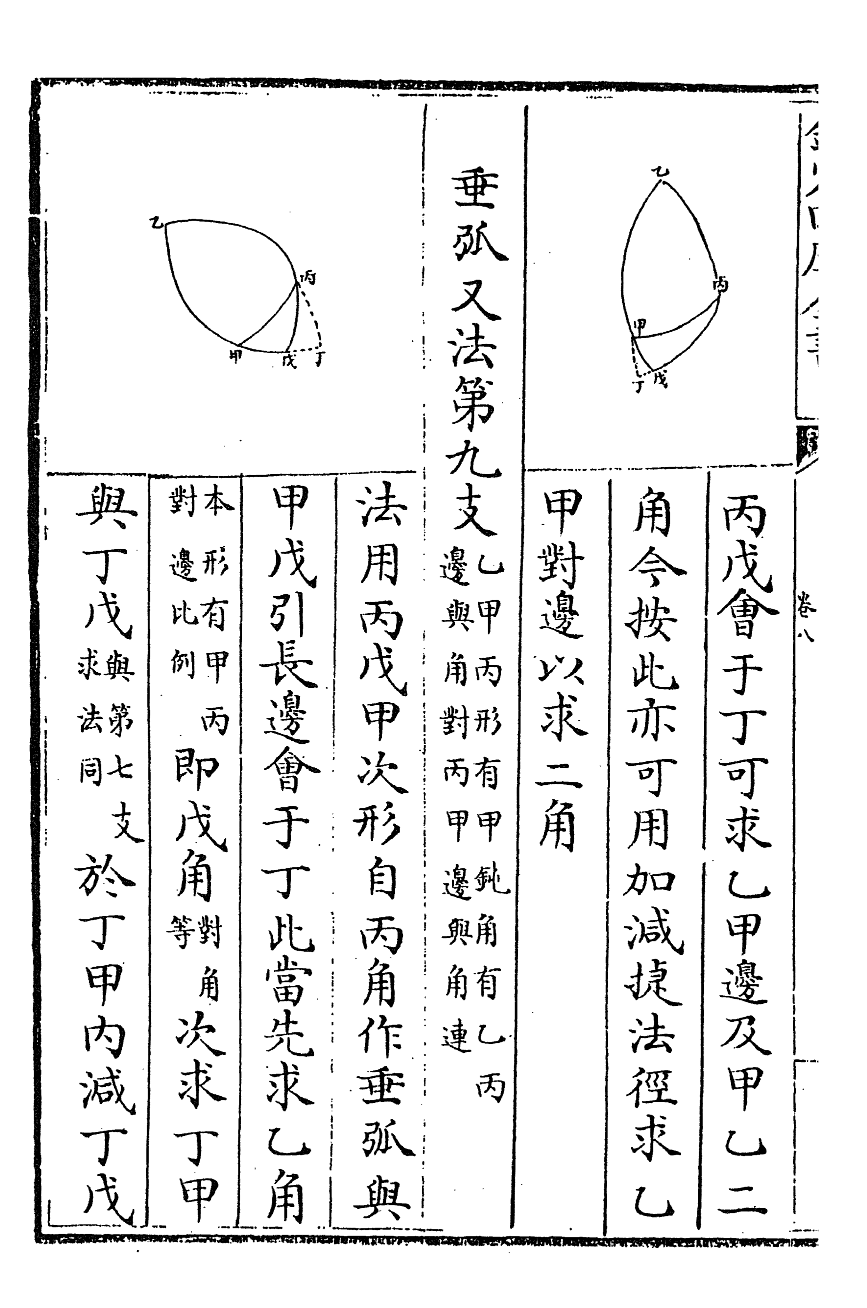
法引設邊成丙戊甲次形戊為乙對角與乙角等作垂弧於次形外此或先求乙丙乙角正弦與甲丙正弦若甲角正弦與乙丙正弦減半周得



丙戊或先求丙戊戊角正弦與丙甲正弦若甲外角正弦與丙戊正弦減半周得乙丙次求丁甲甲外角餘弦與半徑若甲丙正切與甲丁正切丁戊戊外角正割與半徑若丙戊正切與丁戊正切以丁戊減丁甲餘為戊甲以戊甲減半周餘為乙甲因以求丙角若欲先知丙角先求甲丁對邊即可求得丙角

垂弧又法第八支乙甲丙形有丙鈍角有角旁之兩邊丙乙丙甲

本法用甲戊丙次形作甲丁垂弧引



丙戊會于丁可求乙甲邊及甲乙二角令按此亦可用加減捷法徑求乙甲對邊以求二角

垂弧又法第九支

乙甲丙形有甲鈍角有乙丙邊與角對丙甲邊與角連

法用丙戊甲次形自丙角作垂弧與甲戊引長邊會于丁此當先求乙角本形有甲丙對邊比例即戊角對角等次求丁甲與丁戊與第七支求法同於丁甲內減丁戊

為甲戊即得乙甲法同七支因以求丙角

次形

斜弧三角求邊必弧角互易用次形求之圖與算例皆詳明矣然易角為邊有用本角度有用外角度恐易混淆今為釐定開例如左庶用之無誤

凡三角俱銳者在圓周之兩角用本角度其交角用外角度凡三邊必有一邊就圓周凡三角必有兩角在圓周餘一角為交角

凡三角俱鈍者皆用外角度

凡兩鈍一鋭鈍在圜周鋭在交角者亦猶三角俱鈍皆用外角度

凡兩鈍一鋭鋭在圜周者用本角度其兩鈍一在圜周者用外角度一在交角者用本角度

凡兩鋭一鈍鋭在圜周者用本角度鈍在交角者用外角度

凡兩鋭一鈍鋭在圜周者用本角度在交角者用外角度鈍在圜周者亦用外角度

方圓冪積比例補

勿菴先生有方圓冪積一卷凡方圓周徑面體比例詳矣愚思之尚有方分圓分比例一法從來算家只言冪積不言圓分而范蜀公論律云古者以竹為律竹形本圓今以方分置算此律非是算法圓分謂之徑圍方分謂之方斜今圓分而以方法算之此算數非是圓分始見於此圓體用圓分置算亦有至理平圓有平圓分立圓有立圓分得其方分圓分之比例

則有大小不等之渾圓欲得倍數之差但借立方算之其得數甚真亦甚捷故為補此一法

先論圓方

算家命平方如棋局之罫者謂之冪合計之謂之積夫有平冪亦當有平員之分合衆小員之分亦可謂平員之積由是而為立員亦可謂立員分立員積矣夫所謂員分者非若句股容員虛其四隅也非若方體圓體中容得幾個圓球球間尚有空隙也大小相容全無隙罅

但有圓之數而無圓之形是所謂員分員積也如以分作九復碎九成粉入大圓中謂此大員能容幾個粉九

平方平員

方徑一十　冪積一百

員徑一十　冪積七十八又五三九八一六

員積一百

方員有相應之理方員同徑員者刓其四角故冪積七十八有奇若員中復容員必與同徑之方等積大

員與小員猶之大方與小方也此為渾員立方比例之根

立方立員

立方徑一十　立方面冪六百

立員徑一十　立員面冪三百一十四又一五九二六五

立員面員分六百

立員即渾員渾圓面冪與員徑上平冪若四與一故

四倍平員面冪七八五三九八一六而得三一四一五九二六五立方有六面則有六百與渾員面冪若六與三一四一五九二六五而渾員面上之員分則又與立方面冪等

立方徑一十　立方積一千

立員徑一十　立員積五百二十三又五九八七七五

立員員分積一千

立方立員同徑又刓去立方之八角則其積之比例若六與三一四一五九二六五故立方積一立員積

五二三五九八七七五猶之立方面冪六而立員面冪三一四一五九二六五也積與冪既同比例矣則立員員分積亦必與立方積等猶之立員面員分與立方面冪等也然則平冪面冪體積方與方員與員其數皆等借立方可算立員而大小員球之差數睹矣

借立方算立員

立方徑自乘又以徑乘之得積○立員亦徑自乘又以

徑乘之得立員員分積

求大小員差幾倍數

大小員各算得積以積相較得差數若干倍

假如

令有大員徑三十六小員徑六徑之差六倍實體差若干倍

答曰大員比小員差二百一十六倍

法以大員徑自乘再乘得積四萬六千六百五十

六小員徑自乘再乘得積二百一十六其差亦二百一十六倍小員徑自乘即大員徑故差數與積數等二百一十六自乘亦即四萬六千六百五十六

又法以兩徑差倍數自乘又以倍數乘之所得亦同

今有大員徑一十五萬小員徑八千徑之差十九倍弱實體差若干倍

答曰大員比小員差六千五百九十倍奇

法以十五萬自乘再乘大數三三七五以八千自

乘再乘小數五一二大數為實小數為法除實得六千五百九十餘實三三七四〇八幾盡故差六千五百九十倍奇大小數相差甚遠借十九倍數自乘再乘得六千有奇故知首位是六千不用十九倍數算者不正得十九倍也

此日月實體約畧差數也利西泰云日大於月六千五百三十八倍奇亦相近

今有大員徑十五萬小員徑二萬八千二百七十四徑之差五倍有奇實體差若干倍

答曰大員比小員差一百四十九倍奇

法以小員自乘再乘得二二六〇二七七五為小數大員大數如前以大數為實小數為法除實得一百四十九幾盡故差一百四十九倍有奇

此日與地實體約畧差數也利西泰云日大于地球一百六十五倍奇盖利算日徑不啻十五萬里

今有大員徑二萬八千二百七十四小員徑八千徑之差三倍半有奇實體差若干倍

答曰大員比小員差四十四倍奇

法以大員積二二六〇二七七五為實小員積五一二為法除之得四十四除實二二五二八不盡

故差四十四倍奇

此地與月實體約畧差數也利西泰云地大于月三十八倍奇蓋利算月徑不啻八千里

右法算渾圓大小相較之差徑捷如此是亦少廣之一法不可缺也西人言日大于地五倍有奇又云一百六

十五倍有奇兩數甚相懸今為補此一法則日大于地實體與圖徑迥殊不足詫異矣

授時弧矢割員論

勿菴先生員容方直簡法附授時歷弧矢割員圖又附求黄赤内外度及黄赤道差法論之云割員之算始于魏劉徽至劉宋祖冲之父子尤精其術唐宋以算學設科古書猶未盡亡邢臺盖有所本又云郭法用員容方直起算冬至西法用三角起算春分郭用

三乘方以先得矢西用八綫故先得弦又西專用角而郭只用弧西兼用割切而郭只用弦種種各别而不害其同有所以同者在耳且夫數者所以合理也歴者所以順天也法有可采何論中西理所當明何分新舊在善學者知其所以異又知其所以同去中西之見以平心觀理則弧三角之詳明郭圖之簡括皆足以資探索而啟深思務集衆長以觀其會通毋拘名相而取其精粹

永按員者徑一圍三古人之恒言算家之麤率精於算者覺其未密因有割員之術劉祖二家各有其率葢欲細求周徑之數以究平員之理未嘗剖之為度析之為分一一紀其縱横之線以為測天之用也而算家相承仍用粗疎之率立弧矢之法或欲以曲承直則用三乘方法求矢或欲以直求曲則因矢以求半背弦差夫弧背為曲線矢弦為直線亘古無相通之率不相通而强求之其所求得之數必非真數也嘗讀唐荆川先生弧

矢論攷其求背弦差之法所得者猶是徑一圍三六邊之周耳古法求背弦差以矢自乘為實以徑為法除實得半背弦差倍之得全背弦差假令半徑五自乘二十五徑十除之得二五倍之得五加於徑則半周十五又如徑十而矢一者通弦六餘通弦八餘矢二以矢一自乘以徑除之得小數一倍之得二為背弦差又以餘矢二自乘以徑除之得小數四倍之得八為背弦差合兩通弦十四加兩差一半周亦得十五皆徑一圍三之半周 又攷邢氏律歷考行三乘方求矢法迂曲煩難究其所得仍是圍三徑一耳此緣八線表未傳不得不如此立算其得數之非真雖前人亦未嘗覺也郭太史之求黃赤內外度也先用帶

從三乘方求各度矢則得矢不真矣其既得黄赤内外半弧弦也又以矢度求半背弦差加入半弧弦得内外半弧背則弧度亦非真其求黄赤差法以黄道矢求半背弦差減黄道度得黄道半弧弦則得弦不真矣其既得赤道半弧弦也又求半背弦差以加半弧弦得赤道則赤道度亦非真夫表端者景正源潔者流清徑一圍三其本先失而欲數之不謬也得乎八線之法至矣剖析大員細至分秒無非真數以此測天絲毫莫能遁勿

菴先生與郭法相提而論謂種種各别不害其同有所以同者在愚謂郭圖之弦矢猶八線之弦矢也其句股皆八線所有之句股也究之郭法西法終莫能同有所以不同者在耳先生謂當去中西之見平心以觀理夫理有真亦有似使其似是而未真則與真者相提而論雖欲比而同之不可得矣

先生於郭法各添註求黄道矢與弦則註云本法如此原法如此見前求内外半弧背及赤道則註云原法如此

見前今省夫存其本法而不論其法之是與非豈不欲苟求古人與原法所有而今省豈微覺其法之未善與愚豈敢苟論古人哉亦謂理數精微不能兩是寧割愛於古人耳

授時平立定三差辯

勿菴先生云授時歷於日躔盈縮月離遲疾並云以算術垜積一作疊招差立算而今所傳九章諸書無此術也豈古有而今逸耶載攷歷草並以盈縮日數離

為六段並以段目除其段之積度得數乃相減為一差二差又相減為二差則其數齊同乃緣此以生定差及平差立差定差者盈縮初日最大之差也於是以平差立差減之則為每日之定差矣若其布立成法則直以立差六因之以為每日平立合差之差此兩法者若不相蒙而其術巧會從未有能言其故者余因李世德孝廉之疑而試為思之其中原委亦自歷然爰命孫瑴成衍為垛積之圖得書一卷

又云平立定差之法古無其術乃郭太史所創爲以求七政盈縮之度所以造立成之根本也據云依立招差又云依塜疊立招差則似古算術中原有其法而今採用之然不可攷矣愚因李問爲之衍算頗覺其用法之巧焉

永按郭太史時八線表未傳中土以三差法求七政盈縮固巧矣愚竊謂其數之不真凡圓體參差截爲數段前後相較其畸零之數無時而盡今以段目除積度相

較至再而即齊同無是理也凡相差之尾數前後疎密必不均用時有収有棄未有能截然齊一者今恒六因立差以為每日平立合差之差則其差有常尾數不變如太陽盈初縮末限平立合差之尾數恒為八四〇六二其較以六縮初盈末限平立合差之尾數恒為二四六八〇其較以二則盈縮加分盈縮積度之尾數皆有定率太陽如此其他可知平圓中亦必無此差率也以至圓之體而欲以平方立方之差求之圓鑿方枘豈能相入哉或曰郭氏於七政各分段目測之其數盖得之積候未可謂其無憑也曰凡以儀器測

天雖極精密亦及度分而止必不能得其秒微各段相
較至二差而齊同皆秒微之數則其積度畸零之小數
必有遷就於其間者矣觀太陰遲疾立成其損益積度
至於五度四二九三有奇較西法加減均數為贏而又
不知有二三均加減則其日逐測到之度豈盡與天密
合哉平圓中自然之差數八線表盡之矣使平立定三
差之法果符天運則八線亦可不立既有八線之精算
為一切測圓之準繩則此外更無岐途別徑亦無取乎

三差之巧矣於古人之法深究其根存而勿用可也

數學卷八

續數學卷一

婺源江永撰

正弧三角疏義

目録

分支列目隨其所欲求者因目以檢後題

第一支

有正角有餘角有對正角之邊而求兩邊一角

凡正弧三角鈐記甲為正角乙為餘角丙為交角乙丙為對正角之邊丙甲為對餘角之邊乙甲為對交角之邊

求對餘角之邊題第一

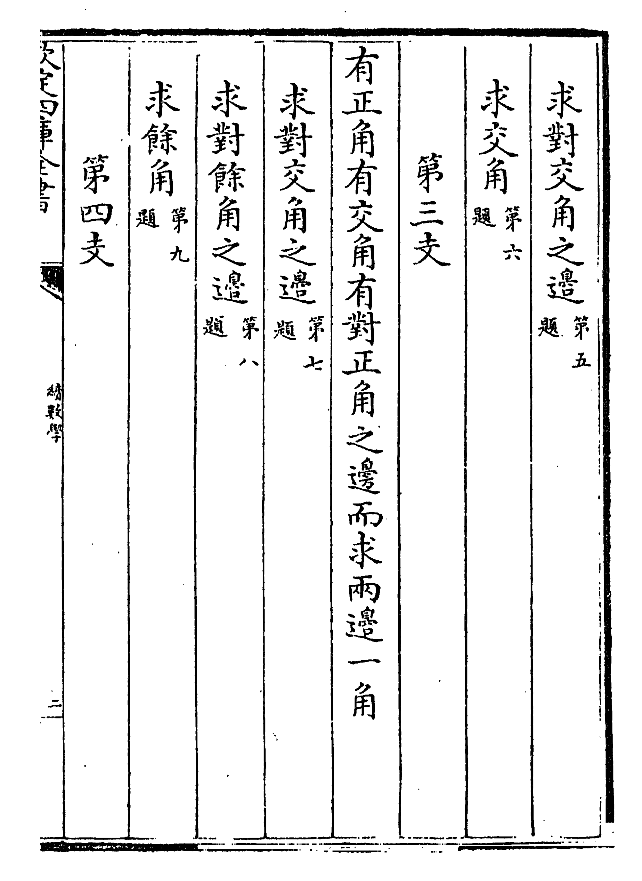
求對交角之邊題第二

求交角題第三

第二支

有正角有餘角有對餘角之邊而求兩邊一角

求對正角之邊題第四



求對交角之邊 第五題

求交角 第六題

第三支

有正角有交角有對正角之邊而求兩邊一角

求對交角之邊 第七題

求對餘角之邊 第八題

求餘角 第九題

第四支

有正角有交角有對交角之邊而求兩邊一角

求對正角之邊 第十題

求對餘角之邊 第十一題

求餘角 第十二題

第五支

有正角有角旁相連之兩邊而求一邊兩角

求對正角之邊 第十三題

求餘角 第十四題

求交角 第十五題

第六支

有正角餘角夾一邊而求兩邊一角

求對正角之邊 第十六題

求對餘角之邊 第十七題

求交角 第十八題

第七支

有正角交角夾一邊而求兩邊一角

第八支

有正角有對正角交角之邊而求一邊兩角

第九支

有正角有對正角餘角之邊而求一邊兩角

求對交角之邊 第二十五題

求餘角 第二十六題

求交角 第二十七題

第十支

有三角求三邊

求對正角之邊 第二十八題

求對餘角之邉　第二十九題

求對交角之邉　第三十題

已上正法已具

第十一支

不用正角以餘角交角二邉相對相求

餘角交角偕對餘角之邉求對交角之邉　第三十一題

交角餘角偕對交角之邉求對餘角之邉　第三十二題

對餘角交角之邉偕餘角求交角　第三十三題

對交角餘角之邊偕交角求餘角第三十四題

正弧三角形

甲為正角　乙為餘角　丙為交角

圓內全形圖及解義詳後

分題舉法

第一支有正角有餘角有對正角之邊求兩邊一角

第一題

有甲角有乙角有對甲角乙丙邊求對乙角丙甲邊

法曰半徑即甲角正弦後做此與乙角正弦若乙丙正弦與丙甲正弦凡首舉者為一率言與者為二率言若者為三率後言與者為四率凡數以二率三率相乘為實以一率為法除之而得第四率為所求之數凡二率可易為三三率可易為二凡半徑為全數在首率者升位可省除在中間者升位可省乘後做此

第二題

有甲角有乙角有對甲角乙丙邊求對丙角乙甲邊

法曰半徑與乙角餘弦若乙丙正切與乙甲正切

第三題

有甲角有乙角有對甲角乙丙邊求丙角

法曰半徑與乙角正切若乙丙餘弦與丙角餘切

第二支 有正角有餘角有對餘角之邊而求兩邊一角

第四題

有甲角有乙角有對乙角丙甲邊求對甲角乙丙邊

法曰乙角正弦與半徑若丙甲正弦與乙丙正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙角餘割

若丙甲正弦與乙丙正弦

第五題

有甲角有乙角有對乙角丙甲邊求對丙角乙甲邊

法曰乙角正切與半徑若丙甲正切與乙甲正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙角餘切

若丙甲正切與乙甲正弦

第六題

有甲角有乙角有對乙角丙甲邊求丙角

法曰丙甲餘弦與半徑若乙角餘弦與丙角正弦

第三支有正角有交角有對正角之邊而求兩邊一角

第七題

有甲角有丙角有對甲角乙丙邊求對丙角乙甲邊

法曰半徑與丙角正弦若乙丙正弦與乙甲正弦

第八題

有甲角有丙角有對甲角乙丙邊求對乙角丙甲邊

法曰半徑與丙角餘弦若乙丙正切與丙甲正切

第九題

有甲角有丙角有對甲角乙丙邊求乙角

法曰乙丙餘弦與半徑若丙角餘切與乙角正切 省率易半徑則次率易乙丙正割

第四支 有正角有交角有對交角之邊而求兩邊一角

第十題

有甲角有丙角有對丙角乙甲邊求對甲角乙丙邊

法曰丙角正弦與半徑若乙甲正弦與乙丙正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙角餘割若乙甲正弦與乙丙正弦

第十一題

有甲角有丙角有對丙角乙甲邊求對乙角丙甲邊

法曰丙角正切與半徑若乙甲正切與丙甲正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙角餘切若乙甲正切與丙甲正弦

第十二題

有甲角有丙角有對丙角乙甲邊求對乙角

法曰乙甲餘弦與半徑若丙角餘弦與乙角正弦（首率易半徑則次率易乙甲正割）

第五支（有正角有角旁相連之兩邊而求一邊兩角）

第十三題

有甲角有乙甲邊丙甲邊求對甲角乙丙邊

法曰半徑與丙甲餘弦若乙甲餘弦與乙丙餘弦

第十四題

有甲角有乙甲邊丙甲邊求乙角

法曰乙甲正弦與半徑若丙甲正切與乙角正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙甲餘割若丙甲正切與乙角正切

第十五題

有甲角有乙甲邊丙甲邊求丙角

法曰丙甲正弦與半徑若乙甲正切與丙角正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙甲餘割

若乙甲正切與丙角正切

第六支 有正角餘角夾一邊而求兩邊一角

第十六題

有甲角有乙角有乙甲邊求對甲角乙丙邊

法曰乙角餘弦與半徑若乙甲正切與乙丙正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙角正割

若乙甲正切與乙丙正切

第十七題

有甲角有乙角有乙甲邊求對乙角丙甲邊

法曰半徑與乙角正切若乙甲正弦與丙甲正切

第十八題

有甲角有乙角有乙甲邊求丙角

法曰半徑與乙角正弦若乙甲餘弦與丙角餘弦

第七支 有正角交角夾一邊而求兩邊一角

第十九題

有甲角有丙角有丙甲邊求對甲角乙丙邊

法曰丙角餘弦與半徑若丙甲正切與乙丙正切

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙角正割若丙甲正切與乙丙正切

第二十題

有甲角有丙角有丙甲邊求對丙角乙甲邊

法曰半徑與丙角正切若丙甲正弦與乙甲正切

第二十一題

有甲角有丙角有丙甲邊求乙角

法曰半徑與丙角正弦若丙甲餘弦與乙角餘弦

第八支有正角有對正角交角之邊而求一邊兩角

第二十二題

有甲角有乙丙邊乙甲邊求丙甲邊

法曰乙甲餘弦與半徑若乙丙餘弦與丙甲餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙甲正割

若乙丙餘弦與丙甲餘弦

第二十三題

有甲角有乙丙邊乙甲邊求丙角

法曰乙丙正弦與半徑若乙甲正弦與丙角正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘割若乙甲正弦與丙角正弦

第二十四題

有甲角有乙丙邊乙甲邊求乙角

法曰乙丙正切與半徑若乙甲正切與乙角餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘切

若乙甲正切與乙角餘弦

第九支 有正角有對正角餘角之邊而求一邊兩角

第二十五題

有甲角有乙丙邊丙甲邊求乙甲邊

法曰丙甲餘弦與半徑若乙丙餘弦與乙甲餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與丙甲正割

若乙丙餘弦與乙甲餘弦

第二十六題

有甲角有乙丙邊丙甲邊求乙角

法曰乙丙正弦與半徑若丙甲正弦與乙角正弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘割

若丙甲正弦與乙角正弦

第二十七題

有甲角有乙丙邊丙甲邊求丙角

法曰乙丙正切與半徑若丙甲正切與丙角餘弦

若欲用半徑為首率以省除則為半徑與乙丙餘切若丙甲正切與丙角餘弦

第十支 有三角求三邊

第二十八題

有甲角乙角丙角求乙丙邊

法曰乙角正切與半徑若丙角餘切與乙丙餘弦首率易半徑則次率易乙角餘切

第二十九題

有甲角乙角丙角求丙甲角

法曰丙角正弦與半徑若乙角餘弦與丙甲餘弦　首率易半

徑則次率易丙角餘割

第三十題

有甲角乙角丙角求乙甲邊

法曰乙角正弦與半徑若丙角餘弦與乙甲餘弦　首率易半

徑則次率易乙角餘割

已上皆有甲角半徑者正法已具其不用甲角者

別為一支四題如左

第十一支 不用正角以餘角交角二邊相對相求

第三十一題

有乙角丙角丙甲邊求乙甲邊

法曰乙角正弦與丙甲正弦若丙角正弦與乙甲正弦

第三十二題

有丙角乙角乙甲邊求丙甲邊

法曰丙角正弦與乙甲正弦若乙角正弦與丙甲正弦

第三十三題

有乙角有丙甲乙甲邊求丙角

法曰丙甲正弦與乙角正弦若乙甲正弦與丙角正弦

第三十四題

有丙角有乙甲丙甲邊求乙角

法曰乙甲正弦與丙角正弦若丙甲正弦與乙角正弦

平圓正弦三角圖

天上隨處皆可作弧三角此姑以黄赤道圖之己辛癸丁圓為極至交圏己為北極辛乙丁為赤道庚為黄極壬乙戊為黄道壬為冬至乙為春秋分戊為夏至丙者設太陽所在己丙甲者從北極出線過太陽抵赤道為過極圏之一象限九十度

乙丙者太陽行過春分之經度乙甲赤道同升度丙甲距緯度戊丁者乙角之度也凡角度皆在九十度之圜周上春分至夏至黄赤皆足九十度故戊丁為乙角度此角度為黄赤道距緯古今不同古時不止二十三度半今度不及二十三度半姑以二十三度半算之可也庚巳者黄極距北極之度亦與戊丁同度也甲為正角即直角其正弦滿半徑故即以半徑為甲角此甲乙丙形即前圖之灣曲形因側視故黄赤道成直線稍轉即成灣曲矣

此圖又有次形丙戊者黄道乙丙之餘弧甲丁者乙甲

赤道之餘弧巳丙者丙甲距緯之餘弧巳戊者乙角丁戊之餘弧而甲丁弧又為巳角之度是次形又有巳戊丙之三角形戊為正角同甲角丙為交角同丙角巳為餘角似乙角也本形有不能以正弦比例者則以次形易之而别法生焉

正弧形弧角相易又次形圖

甲乙丙正弧三角形既易為巳丙戊次形又易為巳庚子形

圖之巳丙戊形即前圖之巳丙戊形丁與庚亦前圖之丁及庚此引丙戊線至丑引丙巳線至子皆滿象限作丑子弧引之至庚與戊巳庚弧會則戊庚丑庚亦皆一象限戊巳子庚形與甲乙丙形相當子為正角同甲角巳為交角似丙角庚為餘角似乙角也○乙丙邊易為庚角乙戊及丙丑皆象限內減同用之丙戊則戊丑即乙丙而戊丑即庚角之弧乙甲邊易為巳角乙甲之餘度丁甲即巳交角之弧是又次形

之兩角即元形之兩邊也乙角易為巳庚邊前設乙甲丁戊為黃赤距度則巳庚者黃極赤極距度故二邊相等丙角易為子庚邊丙交角之弧丑子其餘弧為子庚是又次形之兩邊即元形之兩角而子巳即丙甲子角即甲角於是次形有不能比例者易為又次形而別法又生焉

續數學卷一